

**Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ
ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

Рябов П. Е.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая программа дисциплины
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 - Прикладная математика и информатика,
ОП «Анализ данных»,
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в
экономике и финансах»

Москва 2022

**Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ
ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной
и методической работе

_____ Е.А. Каменева

24.05.2022 г.

Рябов П. Е.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая программа дисциплины
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 - Прикладная математика и информатика,
ОП «Анализ данных»,
Профиль: «Анализ данных и принятие решений в
экономике и финансах»

*Рекомендовано Ученым советом
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
(протокол №21 от 17.05.2022 г.)*

*Одобрено Советом учебно-научного
Департамента анализа данных и машинного обучения
(протокол № 9 от 28.04.2022 г.)*

Москва 2022

УДК 519.2(073)
ББК 22.17
Р 98

Рецензент: **Рамоданов С. М.**, доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения

Р98 Рябов П. Е., доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения

Алгебра и геометрия. Рабочая программа дисциплины для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика, ОП «Анализ данных», Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах». – М.: Финуниверситет, Департамент анализа данных и машинного обучения, 2022. – 41 с.

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к Общефакультетскому (предпрофильному) циклу направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», ОП «Анализ данных», Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах».

В рабочей программе дисциплины определены ее цель, место в структуре ОП, требования к результатам освоения дисциплины, содержание программы, тематика практических занятий, формы самостоятельной работы, оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации, учебно-методическое и информационное обеспечение.

Учебное издание

Рябов Павел Евгеньевич

Алгебра и геометрия

Рабочая программа дисциплины

Компьютерный набор и верстка П. Е. Рябов
Формат 60×90/16. Гарнитура Times New Roman
Усл.п.л. 2,75. Изд. № - 2022. Тираж экз.

Заказ № _____

Отпечатано в Финансовом университете

© Рябов П. Е., 2022

© Финансовый университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| 1. Наименование дисциплины | 5 |
| 2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижений и планируемых результатов обучения по дисциплине | 5 |
| 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы | 6 |
| 4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся | 6 |
| 5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий..... | 6 |
| 5.1. Содержание дисциплины..... | 6 |
| 5.2. Учебно – тематический план | 10 |
| 5.3. Содержание семинаров, практических занятий | 11 |
| 6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине | 16 |
| 6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы | 16 |
| 6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю | 17 |
| 7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине | 28 |
| 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины | 38 |
| 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины..... | 39 |
| 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины | 40 |
| 11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем | 40 |
| 12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине..... | 41 |

1. Наименование дисциплины

«Алгебра и геометрия».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижений и планируемых результатов обучения по дисциплине

Дисциплина «Алгебра и геометрия» обеспечивает формирование следующей компетенции: ПКН-2

| Код компетенции | Наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции ¹ | Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции |
|-----------------|--|--|--|
| ПКН-2 | Способен с помощью математической модели решать поставленную теоретическую или прикладную задачу, реализовывая алгоритм решения в виде программного модуля | <p>1. Демонстрирует знание базовых математических моделей, применяемых в различных предметных областях.</p> <p>2. Адаптирует и применяет существующие математические модели для решения поставленной прикладной или теоретической задачи.</p> <p>3. Владеет методологией математического моделирования для решения профессиональных задач.</p> | <p>Знать базовые понятия математических моделей, применяемых в различных разделах алгебры и геометрии;</p> <p>Уметь демонстрировать алгебро-геометрические математические утверждения основных разделов алгебры и геометрии, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах.</p> <p>Знать существующие математические модели для решения поставленной прикладной задачи;</p> <p>Уметь адаптировать математические модели для решения теоретической задачи.</p> <p>Знать методологию математического моделирования для решения профессиональных задач алгебры и геометрии;</p> <p>Уметь использовать инструментальный <i>Microsoft Excel, R, Python (Jupyter Notebook)</i> для реализации алгоритма решения задач в виде программного модуля в области прикладного машинного обучения.</p> |

3. Место дисциплины в структуре образовательных программ

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к Общефакультетскому (предпрофильному) циклу направления подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика, ОП «Анализ данных», Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах».

Изучение дисциплины «Алгебра и геометрия» базируется на знаниях, полученных в рамках изучения математических дисциплин, входящих в ОП бакалавра по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика: Математический анализ, Дискретная математика, Алгоритмы и структуры данных в языке Python.

4 Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Очная форма обучения

| Вид учебной работы по дисциплине | Всего (в з/е и часах) | Семестр 1 (в часах) |
|--|-----------------------|---------------------|
| Общая трудоемкость дисциплины | 5/180 | 180 |
| Контактная работа - Аудиторные занятия | 68 | 68 |
| Лекции | 16 | 16 |
| Семинары, практические занятия | 52 | 52 |
| Самостоятельная работа | 112 | 112 |
| Вид текущего контроля | Контрольная работа | Контрольная работа |
| Вид промежуточной аттестации | Экзамен | Экзамен |

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Раздел 1. Системы линейных алгебраических уравнений.

Развернутая и матричная формы записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Равносильные преобразования системы и соответствующие им элементарные преобразования строк расширенной матрицы (метод

`sympy.Matrix().elementary_row_op()`). Ступенчатые и редуцированные ступенчатые формы матриц и их реализация в *sympy* (методы `sympy.Matrix().rref()` (*Row echelon form*) и `sympy.Matrix().echelon_form()`). Теорема о приведении СЛАУ к редуцированной ступенчатой форме. Исследование СЛАУ на совместность. Условие совместности линейной системы (теорема Кронекера-Капелли). Нахождение решений СЛАУ методом Гаусса-Жордана. Приведенная система. Множество решений однородной системы. Фундаментальная матрица и фундаментальная система решений (ФСР) приведенной системы. Структура общего решения произвольной системы линейных уравнений, матричная форма его записи.

Раздел 2. Матрицы и определители

Определение числовых матриц и различные формы их истолкования. Столбцы, строки, главная и побочная диагонали (для квадратных матриц). Сложение матриц и умножение на число, свойства линейных операций. Транспонирование матрицы. Свойства операции транспонирования. Индексные обозначения элементов матриц и операций над ними. Матрицы-столбцы и матрицы-строки. Произведение матриц, правило «строка на столбец». Символ суммирования Σ и его свойства. Прямая сумма матриц и произведение Кронекера матриц. Обратная матрица. Элементарные преобразования строк (столбцов) в терминах умножения матриц. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований строк присоединенной матрицы (метод Гаусса -Жордана). LU – разложение обратимой матрицы. Реализация в *sympy* (метод `sympy.Matrix().LUdecomposition()`). След квадратной матрицы. Ранг матрицы и элементарные преобразования. Миноры произвольного порядка. Базисный минор. Теорема о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров. Матрицы Адамара. Основные методы матричной алгебры, реализованные на *Python* в библиотеках *sympy* и *numpy*.

Определение детерминанта (определителя) квадратной матрицы. Миноры его элементов и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по произвольной строке (столбцу). Свойства определителей. Определитель Вандермонда. Вычисление определителей путем накопления нулей в строке (столбце). Детерминант как индикатор линейной зависимости системы своих столбцов (строк). Формулы Крамера. Обобщение теорема Лапласа.

Перестановки и их свойства. Инверсия, четность, порядок перестановки. Вектор инверсий, правый и левый вектор инверсий. Теоремы П.А. Мак-Магона и Д. Фоата – М. П. Шуценберже. Комбинаторно-аналитическое определение детерминанта. Реализация на *Python* класса *Permutation* в *sympy*.

Раздел 3. Алгебраические структуры

Определение и элементарные свойства групп. Единственность единицы и обратного элемента. Симметрическая группа. Подгруппы и нормальные подгруппы. Гомоморфизмы и факторгруппы. Теорема о гомоморфизме.

Определение кольца. Кольцо вычетов. Мультипликативная группа кольца вычетов. Поле вычетов по простому модулю. Поле рациональных дробей. Поле действительных чисел.

Раздел 4. Поле комплексных чисел

Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Корни n -ой степени из комплексного числа. Геометрическое представление корней. Решение уравнений вида $w^n = z, z \neq 0$ над полем комплексных чисел. Показательная форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера. Векторные пространства над полем комплексных чисел. Комплексификация и овеществление. Комплексная и действительная размерность. Матричное представление и сферическое изображение комплексных чисел. Сфера Римана. Реализация основных операций над полем комплексных чисел на *Python* в библиотеках *sympy* и *cmath*.

Раздел 5. Начала алгебры многочленов

Степень многочлена, свойства степени. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов. НОД многочленов. Расширенный алгоритм Евклида и его реализация на *Python* (метод *gcd()* и *gcdex()* в *sympy*).

Основная теорема алгебры в кольце многочленов над полем комплексных чисел. Теорема о разложении многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Формулы Виета. Многочлены с действительными коэффициентами. Многочлены от нескольких переменных. Элементарные симметрические, степенные и полные однородные симметрические многочлены. Формулы Ньютона. Основная теорема для симметрических многочленов и ее реализация на *Python* (метод *symmetrize()* в *sympy*). Дискриминант и результатant многочленов, и их основные свойства. Реализация вычислений дискриминанта и результатанта многочленов на *Python* (методы *resultant()* и *discriminant()* в *sympy*).

Раздел 6. Линейные операторы в линейном пространстве

Определение линейного (векторного) пространства. Простейшие следствия и аксиом линейного пространства. Линейная зависимость векторов пространства. Базис и замена базиса. Линейные подпространства – определение и примеры. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств.

Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора в фиксированном базисе. Определение линейного отображения линейных пространств. Преобразование линейного пространства. Координатная запись линейных преобразований. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса. Сумма и произведение линейных отображений. Изоморфизм линейных пространств. Инвариантные подпространства. Задача о собственных векторах линейного преобразования. Собственные числа, спектр линейного оператора. Собственные подпространства. Характеристический многочлен линейного оператора и его инвариантность относительно замены базиса. Свойства собственных векторов и собственных значений. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения. Диагональный вид матрицы преобразования. Линейные операторы простой структуры. Критерий диагонализуемости матрицы линейного оператора. Теорема Гамильтона – Кэли. Понятие минимального многочлена. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса-Перрона. Векторные пространства со скалярным произведением. Ортогонализация Грамма – Шмидта. Ортогональные и эрмитовы матрицы. Самосопряженные операторы. Методы `charpoly()`, `eigenvects()`, `eigenvals()`, `nullspace()`, `diagonalize()`, реализованные на *Python* в библиотеках *sympy* и *numpy*.

Раздел 7. Квадратичные и билинейные формы

Линейные числовые функции (функционалы, формы) на линейных пространствах. Билинейные и квадратичные формы. Ранг и индекс квадратичной формы. Квадратичные формы и скалярное произведение. Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

Раздел 8. Кривые и поверхности второго порядка

Параметрические уравнения кривой на плоскости. Замечательные кривые. Построение кривых. Кривые второго порядка. Каноническое уравнение окружности. Эллипс, его каноническое уравнение и свойства. Исследование формы эллипса по его уравнению. Окружность как частный случай эллипса. Параметрические уравнения эллипса. Гипербола, ее каноническое уравнение. и свойства. Сопряженная гипербола. Исследование формы гиперболы. Параметрические уравнения гиперболы. Парабола, ее каноническое уравнение и свойства. Исследование формы параболы. Общее уравнение кривой второго порядка и его приведение к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.

Поверхности второго порядка и их канонические уравнения. Поверхности вращения. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Мнимые поверхности. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Метод сечений для исследования и построения поверхностей второго порядка. Общее уравнение поверхности второго порядка и его приведение к каноническому виду.

5.2. Учебно-тематический план

| № п/п | Наименование тем (разделов) дисциплины | Трудоёмкость в часах | | | | | Формы текущего контроля успеваемости |
|----------|--|----------------------|---|--------|--------------------------------|------------------------|--|
| | | Всего | Контактная работа- Аудиторная работа | | | Самостоятельная работа | |
| | | | Общая, в т. ч.: | Лекции | Семинары, практические занятия | | |
| 1. | Системы линейных алгебраических уравнений | 18 | 8 | 2 | 6 | 10 | Выступления у доски, домашние задания, собеседование по материалу и обсуждение результатов |
| 2. | Матрицы и определители | 26 | 10 | 2 | 8 | 16 | |
| 3. | Алгебраические структуры | 18 | 6 | 2 | 4 | 12 | |
| 4. | Поле комплексных чисел | 24 | 8 | 2 | 6 | 16 | |
| 5. | Начала алгебры многочленов | 26 | 10 | 2 | 8 | 16 | Выступления у доски, домашние задания, собеседование по материалу и обсуждение результатов |
| 6. | Линейные операторы в линейном пространстве | 26 | 10 | 2 | 8 | 16 | |
| 7. | Квадратичные и билинейные формы | 24 | 8 | 2 | 6 | 16 | |
| 8. | Кривые и поверхности второго порядка | 18 | 8 | 2 | 6 | 10 | |
| | В целом по дисциплине | 180 | 68 | 16 | 52 | 112 | Согласно учебному плану: контрольная работа |
| | Итого в % | 100 | 38 | 24 | 76 | 62 | |

5.3. Содержание семинаров, практических занятий

| Наименование тем (разделов) дисциплины | Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8,9 (указывается раздел и порядковый номер источника) | Формы проведения занятий |
|---|---|---|
| Раздел 1. Системы линейных алгебраических уравнений | Развернутая и матричная формы записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). равносильные преобразования системы и соответствующие им элементарные преобразования строк расширенной матрицы (метод <code>sympy.Matrix().elementary_row_op()</code>). Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 1. Системы линейных алгебраических уравнений | Ступенчатые и редуцированные ступенчатые формы матриц и их реализация в <code>sympy</code> (методы <code>sympy.Matrix().rref()</code> (Row echelon form) и <code>sympy.Matrix().echelon_form()</code>). Теорема о приведении СЛАУ к редуцированной ступенчатой форме. Исследование СЛАУ на совместность. Условие совместности линейной системы (теорема Кронекера-Капелли). Нахождение решений СЛАУ методом Гаусса-Жордана. Приведенная система. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 1. Системы линейных алгебраических уравнений | Множество решений однородной системы. Фундаментальная матрица и фундаментальная система решений (ФСР) приведенной системы. Структура общего решения произвольной системы линейных уравнений, матричная форма его записи. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 2. Матрицы и определители | Определение числовых матриц и различные формы их истолкования. Столбцы, строки, главная и побочная диагонали (для квадратных матриц). Сложение матриц и умножение на число, свойства линейных операций. Транспонирование матрицы. Свойства операции транспонирования. Произведение матриц, правило «строка на столбец». Прямая сумма матриц и произведение Кронекера матриц. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |

| | | |
|--|--|--|
| <p>Раздел 2. Матрицы и определители</p> | <p>Обратная матрица. Элементарные преобразования строк (столбцов) в терминах умножения матриц. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований строк присоединенной матрицы (метод Гаусса – Жордана). LU – разложение обратимой матрицы. Реализация в sympy (метод <code>sympy.Matrix().LUdecomposition()</code>). След квадратной матрицы. Ранг матрицы и элементарные преобразования. Миноры произвольного порядка. Базисный минор. Теорема о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров. Матрицы Адамара. Основные методы матричной алгебры, реализованные на Python в библиотеках sympy и numpy.</p> <p>Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 2. Матрицы и определители</p> | <p>Определение детерминанта (определителя) квадратной матрицы. Миноры его элементов и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по произвольной строке (столбцу). Свойства определителей. Определитель Вандермонда. Вычисление определителей путем накопления нулей в строке (столбце). Детерминант как индикатор линейной зависимости системы своих столбцов (строк). Формулы Крамера. Обобщение теорема Лапласа.</p> <p>Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 2. Матрицы и определители</p> | <p>Перестановки и их свойства. Инверсия, четность, порядок перестановки. Вектор инверсий, правый и левый вектор инверсий. Теоремы П.А. Мак-Магона и Д. Фоата – М. П. Шуценберже. Комбинаторно-аналитическое определение детерминанта. Реализация на Python класса <code>Permutation</code> в sympy.</p> <p>Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | |
| <p>Раздел 3. Алгебраические структуры</p> | <p>Определение и элементарные свойства групп. Единственность единицы и обратного элемента. Симметрическая группа.</p> <p>Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 3. Алгебраические структуры</p> | <p>Определение кольца. Кольцо вычетов. Мультипликативная группа кольца вычетов. Поле вычетов по простому модулю. Поле рациональных дробей. Поле действительных чисел.</p> <p>Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |

| | | |
|--|--|---|
| <p>Раздел 4. Поле комплексных чисел</p> | <p>Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 4. Поле комплексных чисел</p> | <p>Корни n-ой степени из комплексного числа. Геометрическое представление корней. Решение уравнений вида $w^n = z, z \neq 0$ над полем комплексных чисел. Показательная форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера. Векторные пространства над полем комплексных чисел. Комплексификация и овеществление. Комплексная и действительная размерность. Матричное представление и сферическое изображение комплексных чисел. Сфера Римана. Реализация основных операций над полем комплексных чисел на Python в библиотеках sympy и cmath. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Самотестирование. Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. Зачет по контрольной работе.</p> |
| <p>Раздел 5. Начала алгебры многочленов</p> | <p>Степень многочлена, свойства степени. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов. НОД многочленов. Расширенный алгоритм Евклида и его реализация на Python (метод gcd() и gcdex() в sympy). Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 5. Начала алгебры многочленов</p> | <p>Основная теорема алгебры в кольце многочленов над полем комплексных чисел. Теорема о разложении многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Формулы Виета. Многочлены с действительными коэффициентами. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 5. Начала алгебры многочленов</p> | <p>Многочлены от нескольких переменных. Элементарные симметрические, степенные и полные однородные симметрические многочлены. Формулы Ньютона. Основная теорема для симметрических многочленов и ее реализация на Python (метод symmetrize() в sympy). Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 5. Начала алгебры многочленов</p> | <p>Дискриминант и результатant многочленов, и их основные свойства. Реализация вычислений дискриминанта и результатantа многочленов на Python (методы resultant() и discriminant() в sympy). Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |

| | | |
|--|---|--|
| <p>Раздел 6. Линейные операторы в линейном пространстве</p> | <p>Определение линейного (векторного) пространства. Простейшие следствия и аксиом линейного пространства. Линейная зависимость векторов пространства. Базис и замена базиса. Линейные подпространства – определение и примеры. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 6. Линейные операторы в линейном пространстве</p> | <p>Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора в фиксированном базисе. Определение линейного отображения линейных пространств. Преобразование линейного пространства. Координатная запись линейных преобразований. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса. Сумма и произведение линейных отображений. Изоморфизм линейных пространств. Инвариантные подпространства. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 6. Линейные операторы в линейном пространстве</p> | <p>Задача о собственных векторах линейного преобразования. Собственные числа, спектр линейного оператора. Собственные подпространства. Характеристический многочлен линейного оператора и его инвариантность относительно замены базиса. Свойства собственных векторов и собственных значений. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения. Диагональный вид матрицы преобразования. Линейные операторы простой структуры. Критерий диагонализированности матрицы линейного оператора. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 6. Линейные операторы в линейном пространстве</p> | <p>Теорема Гамильтона – Кэли. Понятие минимального многочлена. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса-Перрона. Векторные пространства со скалярным произведением. Ортогонализация Грамма – Шмидта. Ортогональные и эрмитовы матрицы. Самосопряжённые операторы. Методы <code>charpoly()</code>, <code>eigenvects()</code>, <code>eigenvals()</code>, <code>nullspace()</code>, <code>diagonalize()</code>, реализованные на Python в библиотеках <code>sympy</code> и <code>numpy</code>. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |
| <p>Раздел 7. Квадратичные и билинейные формы</p> | <p>Линейные числовые функции (функционалы, формы) на линейных пространствах. Билинейные и квадратичные формы. Ранг и индекс квадратичной формы. Квадратичные формы и скалярное произведение. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3]</p> | <p>Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.</p> |

| | | |
|--|---|---|
| Раздел 7. Квадратичные и билинейные формы | Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 7. Квадратичные и билинейные формы | Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 8. Кривые и поверхности второго порядка | Параметрические уравнения кривой на плоскости. Замечательные кривые. Построение кривых. Кривые второго порядка. Каноническое уравнение окружности. Эллипс, его каноническое уравнение и свойства. Исследование формы эллипса по его уравнению. Окружность как частный случай эллипса. Параметрические уравнения эллипса. Гипербола, ее каноническое уравнение. и свойства. Сопряженная гипербола. Исследование формы гиперболы. Параметрические уравнения гиперболы. Парабола, ее каноническое уравнение и свойства. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 8. Кривые и поверхности второго порядка | Исследование формы параболы. Общее уравнение кривой второго порядка и его приведение к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |
| Раздел 8. Кривые и поверхности второго порядка | Поверхности второго порядка и их канонические уравнения. Поверхности вращения. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Мнимые поверхности. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Метод сечений для исследования и построения поверхностей второго порядка. Общее уравнение поверхности второго порядка и его приведение к каноническому виду. Рекомендуемые источники: [8.1 - 8.3] | Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. |

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

| Наименование тем (разделов) дисциплины | Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение | Формы внеаудиторной самостоятельной работы |
|---|--|--|
| Раздел 1. Системы линейных алгебраических уравнений | Реализация в sympy основных методов решения СЛАУ (методы <code>sympy.Matrix().elementary_row_op()</code> , <code>sympy.Matrix().rref()</code> (Row echelon form) и <code>sympy.Matrix().echelon_form()</code>). | Решение СЛАУ с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> » |
| Раздел 2. Матрицы и определители | Основные методы матричной алгебры, реализованные на Python в библиотеках sympy и numpy. | Решение задач матричной алгебры с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> » |
| Раздел 3. Алгебраические структуры | Подгруппы и нормальные подгруппы. Гомоморфизмы и факторгруппы. Теорема о гомоморфизме. | Решение задач раздела дисциплины, связанной с алгебраическими структурами, с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> » |
| Раздел 4. Поле комплексных чисел | Реализация основных операций над полем комплексных чисел на Python в библиотеках sympy и cmath. | Решение задач с комплексными числами с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> ». |
| Раздел 5. Начала алгебры многочленов | Реализация алгебры многочленов на Python в библиотеках sympy и numpy (методы <code>gcd()</code> , <code>gcdex()</code> , <code>symmetrize()</code> , <code>resultant()</code> и <code>discriminant()</code>). | Решение задач, связанных с алгеброй многочленов с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> ». |
| Раздел 6. Линейные операторы в линейном пространстве | Методы <code>charpoly()</code> , <code>eigenvecs()</code> , <code>eigenvals()</code> , <code>nullspace()</code> , <code>diagonalize()</code> , реализованные на Python в библиотеках sympy и numpy. | Решение задач, связанных с линейными операторами в линейном пространстве с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> ». |
| Раздел 7. Квадратичные и билинейные формы | Реализация квадратичных и билинейных форм на Python в библиотеках sympy и numpy. | Решение задач по теме «Квадратичные формы» с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> ». |
| Раздел 8. Кривые и поверхности второго порядка | Исследование формы общего уравнения кривой и поверхности второго порядка и его приведение к каноническому виду на Python в библиотеках sympy и numpy | Реализация алгоритма приведения общего уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому с использованием инструментария « <i>Jupyter Notebook</i> ». |

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры заданий контрольной работы

- Исследовать, при каких значениях параметров α и β система линейных уравнений является а) определенной; б) неопределенной; с) несовместной. Найдите общее решение в тех случаях, когда это возможно.

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + (1 - \alpha)x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + (2\alpha - 1)x_2 + \alpha x_3 = \beta. \end{cases}$$

- Исследовать систему на совместность с использованием теоремы Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

- Пусть дана система столбцов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbf{I}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mathbf{I}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Можно ли представить столбец b в виде линейной комбинации столбцов A_1, A_2, A_3 ? Если да, привести такое разложение.

- Найдите ФСР и запишите, используя ФСР, общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

- Составьте однородную систему уравнений, для которой ФСР состоит из

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Используя ФСР однородной системы, найдите общее решение неоднородной системы, заданной матрицей A и столбцом b :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -4 & -8 & -13 \\ 2 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ \mathbf{I}^{-3} \\ \mathbf{I}^{-9} \mathbf{I} \\ -1 \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}$$

7. Найдите многочлен четвертой степени $f(x)$, для которого
 $f(-3) = -77, f(-2) = -13, f(-1) = 1, f(1) = -1, f(2) = -17$.

8. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, чтобы $(A - I_3)^n = O_3$ и используя биномиальную формулу, вычислите A^n для всех целых положительных n .

9. Найдите произведение Кронекера $A \otimes B$ двух матриц A и B , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Всегда ли $A \otimes B = B \otimes A$? Ответ необходимо обосновать.

10. Найдите все матрицы $B \in M_2(\mathbb{R})$, которые коммутируют с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 13 \\ 12 & -3 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

в виде суммы симметрической B и кососимметрической C матриц с вещественными коэффициентами.

12. Для симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 33 & 5 \\ 33 & 7 & -2 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

найдите унитарную матрицу $U \in M_3(\mathbb{R})$ и диагональную матрицу $D \in M_3(\mathbb{R})$ такие, что $U^T \cdot A \cdot U = D$.

13. Для данных матриц A и B найдите элементы b_{32} и b_{23} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = P_{23} \cdot A_{34}(-2) \cdot M_3(-2) \cdot A_{42}(1) \cdot P_{14} \cdot A.$$

14. Представьте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

в виде произведения элементарных матриц $P_{ij}, M_i(\alpha), A_{ji}(\alpha)$.

15. Пусть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите \mathbf{x} из уравнения $C^T A \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

16. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Покажите, что $A^3 = O_3$; б) Используя а), найдите $(I_3 + A)^{-1}$.

17. Найдите матрицу A , если

$$(A^T - 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Используя метод элементарных преобразований (метод Гаусса-Жордана), найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 9 \\ 3 & -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

19. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ такова, что $A^3 = A$. Покажите, что матрица $(I_n - 2A^2)$ – обратима и найдите $(I_n - 2A^2)^{-1}$.

20. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$$

найдите обратимую матрицу U такую, что $UA = rref(A)$

21. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ таковы, что $A + B = I_n$ и $A^2 + B^2 = O_n$. Покажите, что A и B обратимы, причем $(A^{-1} + B^{-1})^n = 2^n I_n$.

22. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ такова, что $A^{-1} = I_n - A$. Покажите, что $A^6 - I_n = O_n$.

23. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

представьте в виде произведения двух матриц, $A = LU$, где L – нижняя треугольная матрица, а U – верхняя треугольная матрица, (LU – факторизация (Lower–Upper (LU) decomposition)).

24. Разлагая по второму столбцу, вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

25. Используя элементарные преобразования, вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}.$$

26. Показать, что квадрат площади параллелограмма, построенного по радиус-векторам точек $P(a; b)$ и $Q(c; d)$ в прямоугольной системе координат, выражается по формуле

$$S^2 = \Delta^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{vmatrix}.$$

27. Вывести формулу для объема тетраэдра с вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

28. Не раскрывая определитель слева, покажите, что

$$\begin{vmatrix} \alpha a_2 + a_3 & \beta a_3 + a_1 & \gamma a_1 + a_2 \\ \alpha b_2 + b_3 & \beta b_3 + b_1 & \gamma b_1 + b_2 \\ \alpha c_2 + c_3 & \beta c_3 + c_1 & \gamma c_1 + c_2 \end{vmatrix} = (1 + \alpha\beta\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

29. Пусть x, y, z попарно различны и

$$\begin{vmatrix} x^3 + 1 & x^2 & x \\ y^3 + 1 & y^2 & y \\ z^3 + 1 & z^2 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Покажите, что $x y z = -1$.

30. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

31. Решите уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

32. Вычислите определитель порядка n , элементы которого заданы условием:

$$a_{ij} = \min(i, j).$$

33. Вычислите определитель порядка n , элементы которого заданы условием:

$$a_{ij} = \max(i, j).$$

34. Найдите значения λ , при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных значениях параметра λ и чему он равен при других значениях λ .

35. Найдите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях λ .

36. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

найдите: а) базисный минор с наименьшим значением; б) ранг матрицы, составленный из всех базисных миноров.

37. Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ – матрица порядка n , $\Delta = \det(A)$ – ее определитель.

Пусть $\text{adj}(A)$ – присоединенная матрица, $\text{adj}(A) = A^\vee = (A_{ij})^T$, здесь A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} . Покажите, что если A – обратима, то справедливо равенство

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = \Delta^{n-2} \cdot A.$$

38. Пусть $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ – квадратные матрицы второго порядка, причем $AB = BA$. Верно ли следующее равенство

$$\det(A^n + B^n) = \det(A^n) + \det(B^n) + \text{tr}[(A \text{adj}(B))^n], \quad n \in \mathbb{N}?$$

Ответ необходимо обосновать.

39. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ вырожденная квадратная матрица порядка n . Докажите неравенство $\text{rank}(\text{adj}(A)) \leq 1$.
40. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ квадратная матрица порядка n , причем $\text{adj}(A) = O_n$. Покажите, что $\text{rank}(A) \leq n - 2$.
41. Приведите пример ненулевой матрицы $A \in M_4(\mathbb{R})$ (элементы которой все отличны от нуля), у которой $\text{adj}(A) = O_4$.
42. Найдите число инверсий и определите четность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

43. Пусть $\pi \in S_n$ разложена в произведение независимых циклов длин l_1, l_2, \dots, l_m . Покажите, что сигнатуру перестановки можно определить по формуле

$$\varepsilon_\pi = (-1)^{\sum_{k=1}^m (l_k - 1)}.$$

44. Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 9 & 4 & 7 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите вектор

инверсий $V(\pi)$, правый вектор инверсий $R(\pi)$, левый вектор инверсий $L(\pi)$.

Найдите $\pi(i) - r_i + l_i$. Чему равны $l_{\pi^{-1}(5)}$ и v_5 ?

45. Найдите перестановку, которая имеет вектор инверсий

$$V(\pi) = \{8, 3, 1, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 0\}.$$

46. Найдите перестановку, которая имеет правый вектор инверсий (Lehmer cod)

$$R(\pi) = \{5, 1, 5, 3, 3, 1, 2, 0, 0\};$$

47. Найдите перестановку, которая имеет левый вектор инверсий

$$L(\pi) = \{0, 0, 0, 2, 1, 3, 3, 7, 6\}.$$

48. Какой максимальный порядок может иметь перестановка из S_{27} ?

49. Найдите значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-ого порядка со знаком плюс.

50. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?

51. Найдите количество элементов $\#X$ множества

$$X = \{\pi \in S_9: \text{ind}(\pi) = 11, N(\pi) = 7\}.$$

52. Представьте комплексное число в алгебраической форме

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

53. Решить систему уравнений над полем \mathbb{C}

$$\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4, \\ |z + 1 + i| = |z - 1 - i|. \end{cases}$$

54. Пусть $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, $a = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4$, $b = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6$. Покажите, что a и b являются корнями квадратного трехчлена $z^2 + z + 2$.

55. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

$$0 < \arg \frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}.$$

56. Пусть A и C действительные, а B – комплексные постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Покажите, что уравнение

$$A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0, \quad (A > 0),$$

является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и её радиус.

57. Принадлежат ли точки z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости одной окружности, где $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 9 - 6i$, $z_4 = -6 + 3i$? Если эти точки лежат на одной окружности, то найдите центр и радиус такой окружности.

58. Разделите многочлен $f(x)$ с остатком $r(x)$ на многочлен $g(x)$ и проверьте равенство $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

59. Пусть $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Найдите наибольший общий делитель $d = \text{НОД}(f, g)$. Будут ли f и g взаимно простыми? Найдите также многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $f \cdot u + g \cdot v = \text{НОД}(f, g) = d$, если

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1,$$

$$g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1.$$

60. Определить алгебраическую кратность всех корней многочлена $f \in \mathbb{C}[x]$, где

$$f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 6 + 18i.$$

61. При каких a и b многочлен $f(x) = x^5 + ax^3 + b$ имеет двойной корень, отличный от нуля?

62. Разложить на линейные множители над полем комплексных чисел

$$f(z) = z^8 - 1 - i.$$

63. Найдите значение симметрического многочлена F от корней c_i многочлена $f(x)$, если $F = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (c_i^5 c_j^3 + c_i^3 c_j^5)$, $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 7$.

64. Найдите все значения параметра $a \in \mathbb{R}$, при котором уравнение

$$x^{11} - 2x^{10} + x^9 - 2x^3 + 11x^2 - 16x + a = 0$$

имеет кратные корни.

65. Найти все значения параметра $b \in \mathbb{R}$, при которых многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общие корни, если

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 7x - 1, g(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + b.$$

66. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (x - 4)y - 2x + y^2 + 3 = 0, \\ x^3 - x^2 + (x + 7)y - 5x + y^3 - 5y^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

67. Пусть $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ и $g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$.

Найдите функции $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $fu + gv = \text{Res}(f, g)$.

68. Разложите на линейные и квадратичные множители над полем вещественных чисел многочлен $f(x) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1$.

69. Проверьте, что многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ является симметрическим и выразить его в виде многочлена F от элементарных симметрических многочленов, если

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 - x_3)(3x_2 - x_1 - x_3)(3x_3 - x_1 - x_2).$$

70. Пусть e_1, \dots, e_4 — стандартный базис $V = \mathbb{R}^4$. Пусть векторы e'_1, \dots, e'_4 и x заданы

своими координатами в базисе (e) :

$$e'_1 = \{1, 2, -1, -2\}, e'_2 = \{2, 3, 0, -1\}, e'_3 = \{1, 2, 1, 4\}, e'_4 = \{1, 3, -1, 0\},$$

$$x = \{7, 14, -1, 2\}.$$

Покажите, что система e'_1, \dots, e'_4 — также базис пространства V , найдите матрицу перехода $C = C_{(e) \rightarrow (e')}$. Найдите также координаты вектора x в этом базисе.

71. Пусть $e_0 = 1, e_1 = x, e_2 = x^2, e_3 = x^3, e_4 = x^4$ — стандартный базис пространства многочленов $V = \mathbb{R}_4[x]$. Рассмотрим семейство (систему) многочленов e'_0, \dots, e'_4 и $P_4(x)$:

$$e'_0 = 1, e'_1 = (x - 7), e'_2 = (x - 7)^2, e'_3 = (x - 7)^3, e'_4 = (x - 7)^4,$$

$$P_4(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 9x^4.$$

Покажите, что система e'_0, \dots, e'_4 — также базис пространства V , найдите матрицу перехода $C = C_{(e) \rightarrow (e')}$. Найдите координаты $P_4(x)$ в этом базисе.

72. Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек L_1, L_2 систем векторов пространства $V = \mathbb{R}^4$:

$$L_1 = \langle a_1 = \{1, 2, 1, -2\}, a_2 = \{2, 3, 1, 0\}, a_3 = \{1, 2, 2, -3\} \rangle,$$

$$L_2 = \langle b_1 = \{1, 1, 1, 1\}, b_2 = \{1, 0, 1, -1\}, b_3 = \{1, 3, 0, -4\} \rangle.$$

73. Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1, L_2 пространства $V = \mathbb{R}^4$:

$$L_1 = \langle a_1 = \{1, 2, 0, 1\}, a_2 = \{1, 1, 1, 0\} \rangle,$$

$$L_2 = \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

74. Пусть L_1 и L_2 – подпространства $V = \mathbb{R}^4$:

$$L_1 = \langle a_1 = \{1, 1, 1, 1\}, a_2 = \{0, 1, 1, 1\} \rangle,$$

$$L_2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Покажите, что $V = L_1 \oplus L_2$ и представьте $x = \{1, 2, 3, 4\}$ в виде суммы

$$x = y + z, y \in L_1, z \in L_2.$$

75. Линейное подпространство $L \in V = \mathbb{R}^5$ задано в виде

$$L = \{a = \{x, y, x + y, x - y, 2x\} \in V = \mathbb{R}^5, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Найдите три подпространства $L_2, L_3, L_4 \in V$, ни одно из которых не равно $\{0\}$, такие, что $V = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus L_4$.

76. Пусть

$$L = \{f \in \mathbb{R}_4[x] : f(6) = 0\}.$$

а) Найдите базис подпространства L ; б) Дополните в п.а) базис до базиса всего пространства $V = \mathbb{R}_4[x]$; с) Найдите прямое дополнение L_2 к L_1 , т.е. $\mathbb{R}_4[x] = L_1 \oplus L_2$.

77. Пусть «прямая» L_1 в $V = \mathbb{R}^4$ задана в виде

$$L_1 = \{x_1 = 8t, x_2 = 4t, x_3 = 3t, x_4 = -3t, t \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть "гиперплоскость" L_2 задана в виде уравнения

$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

Покажите, что $V = L_1 \oplus L_2$ и найдите проекции $y \in L_1$ и $z \in L_2$ вектора $x = \{1, 2, 3, 4\}$ на эти подпространства при проектировании, параллельном L_1 и L_2 , т.е. представьте x в виде $x = y + z, y \in L_1, z \in L_2$.

78. Пусть линейный оператор $\varphi: V \rightarrow V$ в пространстве V в базисе $(e) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ имеет матрицу:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ в базисе } (e)$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе

$$(e') = (e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3, e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

79. Пусть линейный оператор в пространстве $V = \mathbb{R}^3$ имеет в базисе

$$(e) = (e'_1 = \{8, -6, 7\}, e'_2 = \{-16, 7, -13\}, e'_3 = \{9, -3, 7\})$$

матрицу

$$A_{\varphi}^{(e^F)} = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

Найдите его матрицу $A_{\varphi}^{(e^{FF})}$ в базисе $(e'') = (e''_1 = \{1, -2, 1\}, e''_2 = \{3, -1, 2\}, e''_3 = \{2, 1, 2\})$.

80. Выясните, можно ли матрицу $A_{\varphi}^{(e)}$ линейного оператора привести к диагональному виду. Найдите собственные значения, собственный базис, матрицу перехода и соответствующий вид матрицы линейного оператора в новом базисе.

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

81. Найдите минимальный многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 & -1 & 8 & -3 & -2 \\ 1 & -5 & 8 & -3 & -5 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -4 & 6 & -2 & 0 & 8 \\ -1 & 11 & -12 & 9 & 3 & -3 & 9 \\ -3 & 11 & -12 & 5 & 8 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 4 & 1 & -7 \\ 1 & -5 & 6 & -2 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

82. С помощью процесса ортогонализации постройте ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов пространства $V = \mathbb{R}^4$:

$$L = \langle a_1 = \{2, 1, 3, -1\}, a_2 = \{7, 4, 3, -3\}, a_3 = \{1, 1, -6, 0\}, a_4 = \{5, 7, 7, 8\} \rangle$$

83. Найдите проекцию вектора x на подпространство L и ортогональную составляющую вектора x , если $x = \{7, -4, -1, 2\}$ и L задано системой уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ L: \{3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

84. Найдите расстояние от вектора $x = \{3, 3, -1, 1, -1\}$ до подпространства L , заданного виде

$$L = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\}.$$

85. Найдите угол между вектором $x = \{2, 2, 1, 1\}$ и подпространством L , заданного в виде линейной оболочки

$$L = \langle a_1 = \{3, 4, -4, -1\}, a_2 = \{0, 1, -1, 2\} \rangle.$$

86. Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе самосопряженного оператора φ , заданного в некотором ортонормированном базисе (e) матрицей

$$A_{\varphi}^{(e)} = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

87. Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к главным осям

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2.$$

88. Определите тип кривой второго порядка, её каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат, если кривая задана уравнением

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

89. Определите тип кривой второго порядка, её каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат, если кривая задана уравнением

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

90. Для поверхности второго порядка, заданной в четырехмерном точечном евклидовом пространстве, найдите ее каноническое уравнение и каноническую систему координат

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 5 = 0.$$

91. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $Q(x)$ является положительно определенной, если

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

92. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $Q(x)$ является отрицательно определенной, если

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

93. Эквивалентны ли над полем вещественных чисел квадратичные формы Q_1 и Q_2 , где

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3; \\ Q_2 &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3? \end{aligned}$$

94. Исследовать систему на совместность с использованием теоремы Кронекера-Капелли

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 1, \\ \{x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 &= 4. \end{aligned}$$

95. Вычислите определитель порядка n , элементы которого заданы условием: $a_{ij} = \min(i, j)$.

96. Пусть $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, $a = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4$, $b = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6$. Покажите, что a и b являются корнями квадратного трехчлена $z^2 + z + 2$.

97. Пусть $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ и $g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$. Найдите функции $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $fu + gv = \text{Res}(f, g)$.

98. Выясните, можно ли матрицу $A_{\varphi}^{(e)}$ линейного оператора привести к диагональному виду. Найдите собственные значения, собственный базис, матрицу перехода и соответствующий вид матрицы линейного оператора в новом базисе.

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

99. Эквивалентны ли над полем вещественных чисел квадратичные формы Q_1 и Q_2 , где

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3; \\ Q_2 &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3? \end{aligned}$$

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

| Наименование компетенции | Наименование индикаторов достижения компетенции | Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции | Типовые контрольные задания |
|---|--|--|--|
| ПКН-2 Способен с помощью математической модели решать поставленную теоретическую или прикладную задачу, реализовывая алгоритм решения в виде программного модуля | 1. Демонстрирует знание базовых математических моделей, применяемых в различных предметных областях. | Знать базовые понятия математических моделей, применяемых в различных разделах алгебры и геометрии; | Приведите основную теорему симметрических многочленов и проиллюстрируйте её на примере симметрического многочлена $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3$, представив его в виде явного многочлена от элементарных симметрических многочленов. |
| | 2. Адаптирует и применяет существующие математические модели для решения поставленной прикладной или теоретической задачи. | Уметь демонстрировать алгебро-геометрические математические утверждения основных разделов алгебры и геометрии, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах. | Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ вырожденная квадратная матрица порядка n . Докажите неравенство $\text{rank}(\text{adj}(A)) \leq 1.$ |
| | 3. Владеет методологией математического моделирования для решения профессиональных задач. | Знать существующие математические модели для решения поставленной прикладной задачи; | Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к главным осям $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 8x_1 x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3 x_4 + x_4^2$. |
| | | Уметь адаптировать математические модели для решения теоретической задачи. | Приведите пример ненулевой матрицы $A \in M_4(\mathbb{R})$ (элементы которой все отличны от нуля), у которой $\text{adj}(A) = O_4$. |
| | | Знать методологию математического моделирования для решения профессиональных задач алгебры и геометрии; | Какой максимальный порядок может иметь перестановка из S_{27} ? |

| | | | |
|--|--|---|--|
| | | Уметь использовать инструментарий <i>Microsoft Excel, R, Python (Jupyter Notebook)</i> для реализации алгоритма решения задач в виде программного модуля в области прикладного машинного обучения. | Найдите наибольшее значение определителя шестого порядка, составленного из чисел -1 , 0 , и 1 . (Реализовать алгоритм решения в виде программного модуля). |
|--|--|---|--|

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Дайте определение системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Какая СЛАУ называется однородной, неоднородной. Приведите соответствующие примеры. Может ли неоднородная СЛАУ $Ax = b$ быть неопределенной, если столбцы её матрицы линейно независимы (линейно зависимы)? Ответ необходимо обосновать.
2. Сформулируйте определение редуцированной ступенчатой формы СЛАУ. Сформулируйте теорему о приведении СЛАУ к редуцированной ступенчатой форме. Может ли неоднородная СЛАУ $Ax = b$ быть совместной (несовместной), если соответствующая однородная СЛАУ является определенной (неопределенной)? Ответ необходимо обосновать.
3. Дайте определение ранга матрицы. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли. Совместна или несовместна СЛАУ, если столбцы её расширенной матрицы линейно независимы (линейно зависимы)? Ответ необходимо обосновать.
4. Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ. Сформулируйте теорему об общем виде решения однородной (неоднородной) СЛАУ. Приведите соответствующие примеры. Найдите ФСР однородного уравнения

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0.$$

5. Дайте определение матрицы размеры $m \times n$ и сформулируйте основные операции над ними. Какие матрицы называются симметрическими, кососимметрическими? Приведите соответствующие примеры. Можно ли

квадратную матрицу представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц? Ответ необходимо обосновать

6. Дайте определение произведения матриц и сформулируйте основные свойства произведения матриц. Существуют ли ненулевые квадратные матрицы A и B такие, что $A \cdot B = 0$? Ответ необходимо обосновать. Какие матрицы называются коммутирующими? Верно ли равенство $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$? Ответ необходимо обосновать.

7. Дайте определение прямой суммы \oplus и произведения Кронекера \otimes для матриц. Приведите соответствующие примеры прямой суммы и произведения Кронекера матриц. Верно ли $tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B)$? Ответ необходимо обосновать.

8. Какие матрицы называются обратимыми? Сформулируйте основные свойства для обратных матриц. Докажите $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

9. Сформулируйте понятие элементарной матрицы. Докажите, что

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} ; M_i(\alpha)^{-1} = M_i(1/\alpha) ; [A_{ji}(\alpha)]^{-1} = A_{ji}(-\alpha).$$

Приведите соответствующие примеры.

10. Сформулируйте алгоритм (с обоснованием) вычисления обратной матрицы (метод Гаусса-Жордана). Приведите соответствующий пример.

11. Сформулируйте критерий обратимости матрицы при помощи произведения элементарных матриц. Приведите соответствующий пример.

12. Сформулируйте алгоритм LU разложения обратимой матрицы. Приведите соответствующий пример.

13. Приведите определения определителей небольших порядков для матриц ($n = 1, 2, 3$). Приведите геометрический смысл (с обоснованием) определителей для $n = 2$ и $n = 3$.

14. Дайте определение минора и алгебраического дополнения к элементам матрицы. Приведите кофакторное определение определителя матрицы n -ого порядка. Сформулируйте теорему Лапласа о разложении определителя

по строке или столбцу. Найдите $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}, k \neq i$. Ответ необходимо обосновать.

15. Приведите формулу для нахождения обратной матрицы через присоединенную матрицу $adj(A)$. Найдите $A \cdot adj(A)$. Ответ необходимо обосновать.
16. Приведите основные свойства определителей. Пусть A – кососимметрическая матрица нечетного порядка. Найдите её определитель. Ответ необходимо обосновать.
17. Сформулируйте и докажите формулы Крамера.
18. Дайте определение минора k -ого порядка. Приведите соответствующие примеры. Пусть $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Сколько различных миноров k -ого порядка может быть? Ответ необходимо обосновать.
19. Дайте определение ранга матрицы, используя понятие минора. Какой минор называется базисным? Сформулируйте теорему о базисном миноре. В чем состоит метод окаймляющих миноров? Приведите соответствующий пример.
20. Дайте определение перестановки из n элементов. Приведите основные операции над перестановками (умножение, обратная перестановка).
Решите относительно перестановки x уравнение

$$\pi \circ x = r, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$
21. Сформулируйте понятие инверсии перестановки, сигнатуры перестановки. Какая перестановка называется четной (нечетной)? Что называется порядком перестановки? Приведите соответствующие примеры.
22. Дайте комбинаторно-аналитическое определение определителя n -ого порядка матрицы. Приведите соответствующие примеры с обоснованием формулы определителей для $n = 2, n = 3$.
23. Дайте определение вектора инверсий, правого и левого вектора инверсий. Как связаны элементы перестановки с компонентами векторов инверсий?

Приведите соответствующие примеры.

24. Приведите алгоритм определения перестановки по вектору инверсии.
Пусть дан вектор $\vec{a} = \{4; 6; 1; 0; 3; 1; 1; 0\}$. Найдите перестановку π , для которой вектор инверсий $v(\pi)$ совпадает с \vec{a} . Сколько таких перестановок существует?
25. Дайте определение индекса перестановки. Сформулируйте теоремы Мак-Магона и Фоата-Шуценберже. Проиллюстрируйте теоремы на примере симметрической группы S_4 .
26. Дайте определение комплексного числа в алгебраической форме. Приведите тригонометрическую и показательную формы комплексного числа. Выведите формулу площади параллелограмма с вершинами в точках z_1 и z_2 комплексной плоскости.
27. Выведите формулы для извлечения корня n -ой степени из комплексного числа и приведите геометрическую интерпретацию о расположении n значений корня. Какой корень называется примитивным. Приведите свойства примитивных корней.
28. Выведите формулы для сферического изображения комплексного числа. Найдите сферическое изображение комплексного числа $z = 3 + 5i$.
29. Дайте определение наибольшего общего делителя многочленов, наименьшего общего кратного многочленов. Приведите линейное разложение наибольшего общего делителя. Какие многочлены называются взаимно простыми? Приведите соответствующие примеры. Найдите многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что
- $$(2x^3 - 7x^2 - 9x + 63)u(x) + (x^3 + x^2 - 19x - 9)v(x) = 1.$$
30. Дайте определение неприводимого многочлена. Будет ли неприводимым многочленом над \mathbb{R} многочлен вида $x^4 + 4$? Ответ необходимо обосновать.
31. Дайте определение алгебраической кратности корня многочлена. Приведите соответствующие примеры. Сформулируйте основную теорему алгебры комплексных чисел. Является ли поле \mathbb{C} алгебраически замкнутым? Ответ необходимо обосновать.
32. Приведите (с выводом) формулы Виета для многочлена

$$f \in \mathbb{C}[z], \deg(f) = n.$$

33. Приведите свойства (с доказательством) комплексных корней для многочленов с вещественными коэффициентами $f \in \mathbb{R}[z], \deg(f) = n$. Разложите на множители над \mathbb{R} многочлен $x^5 - 1 \in \mathbb{R}[x]$.
34. Дайте определение многочлена от нескольких переменных. Какой многочлен называется симметрическим? Приведите выражения основных симметрических многочленов.
35. Приведите формулы элементарных симметрических многочленов $s_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Укажите их в явном виде для случая $n = 4, k = 4$.
36. Приведите формулы Ньютона, которые связывают многочлены Ньютона (степенные суммы) с элементарными симметрическими многочленами $s_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
37. Приведите основную теорему симметрических многочленов и проиллюстрируйте её на примере симметрического многочлена $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3$, представив его в виде явного многочлена от элементарных симметрических многочленов.
38. Дайте определение дискриминанта многочлена n -ой степени с комплексными коэффициентами и приведите основные свойства дискриминанта многочлена. Приведите формулу для определения дискриминанта многочлена и пользуясь этой формулой найдите дискриминант многочлена $f(z) = z^3 + az + b$.
39. Дайте определение результата двух многочленов n -ой и m -ой степеней. Приведите основные свойства результата многочленов. Найдите многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $f(x)u(x) + g(x)v(x) = \text{Res}(f(x); g(x))$, где
- $$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1.$$
40. Дайте определение линейного пространства и приведите примеры линейных пространств. Является ли линейным пространством $V_1 = \{f \in$

$\mathbb{R}_4[x]: f(5) = 0\}$, $V_2 = \{f \in \mathbb{R}_4[x]: f(5) = 2\}$? Ответ необходимо обосновать.

41. Дайте определение линейной зависимости и независимости системы векторов. Что называется базисом конечномерного векторного пространства? Как определяется размерность конечномерного векторного пространства. Найдите размерность и какой-нибудь базис линейного пространства $V = \{f \in \mathbb{R}_4[x]: f(3) = 0\}$.
42. Дайте определение матрицы перехода от одного базиса к другому линейного пространства. Сформулируйте основные свойства матрицы перехода. Приведите примеры матрицы перехода.
43. Дайте определение линейного подпространства. Приведите основные примеры линейных подпространств. Является ли объединение двух линейных подпространств линейным подпространством? Ответ необходимо обосновать.
44. Дайте определение пересечения, суммы линейных подпространств. Сформулируйте теорему о размерности суммы подпространств. Какая сумма называется прямой? Приведите пример суммы подпространств, которая не является прямой (с обоснованием).
45. Дайте определение линейного многообразия линейного пространства. Как определяется размерность линейного многообразия? Является ли $V = \{x \in \mathbb{R}^5: x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 1\}$ линейным многообразием? Если да, то найдите его размерность.
46. Дайте определение линейного оператора. Что называется ядром и образом линейного оператора? Как связаны дефект линейного оператора и ранг линейного оператора в конечномерном линейном пространстве.
47. Дайте определение матрицы линейного оператора. Найдите ранг линейного оператора, если $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = \{x_1; x_1 + x_2; x_1 + x_2 + x_3\}$. Как изменится матрица линейного оператора при переходе к другому базису? Ответ необходимо обосновать.

48. Дайте определение инвариантного линейного подпространства относительно линейного оператора. Будут ли ядро и образ линейного оператора инвариантными подпространствами? Ответ необходимо обосновать.
49. Дайте определение собственного вектора и соответствующего собственного значения линейного оператора. Что называется спектром и резольвентой линейного оператора.
50. Дайте определение характеристического многочлена линейного оператора. Покажите, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.
51. Дайте определение собственного подпространства линейного оператора. Как связаны алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения. Приведите пример линейного оператора и соответствующего собственного значения, геометрическая кратность которого меньше его алгебраической кратности.
52. Дайте определение диагонализируемого оператора. Приведите критерий диагонализируемости.
53. Приведите основные свойства собственных чисел и собственных векторов линейных операторов.
54. Сформулируйте теорему Гамильтона – Кэли.
55. Дайте определение минимального многочлена матрицы линейного оператора. Как связаны характеристический и минимальный многочлены?
56. Дайте определение евклидова векторного пространства. Что называется длиной вектора. Докажите неравенство Коши–Буняковского.
57. Дайте определение ортогональных векторов. Пусть $V = \mathbb{R}^3$ и пусть
- $$\|x\|^2 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$
- Будет ли указанное выражение определять норму вектора? Если да, то найдите все векторы, ортогональные $x = \{1; 1; 1\}$.

58. Дайте определение ортогонального и ортонормированного базиса. Что называется ортогональным дополнением к подпространству евклидова пространства?
59. Приведите теорему обоснования ортогонализации Грама–Шмидта. Приведите явные формулы построения ортонормированного базиса, используя процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
60. Какая матрица называется ортогональной? Приведите пример ортогональной матрицы.
61. Дайте определение самосопряженного оператора. Приведите примеры (с обоснованием) самосопряженного и не самосопряженного линейных операторов. Какая матрица характеризует самосопряженный оператор?
62. Приведите основные свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженных операторов.
63. Дайте определение квадратичной формы, ее матрицы, ранга квадратичной формы. Какая квадратичная форма называется невырожденной (вырожденной). Как определяется симметричная билинейная форма, полярная к квадратичной форме. Для квадратичной формы
- $$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
- найдите симметричную билинейную форму, полярную к Q .
64. Дайте определение канонического вида квадратичной формы. Опишите алгоритм приведения к каноническому виду квадратичной формы при помощи ортогонального преобразования.
65. Дайте определение нормального вида квадратичной формы. Что такое положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатура квадратичной формы. Приведите соответствующие примеры.
66. Сформулируйте закон инерции для квадратичной формы с вещественными коэффициентами.
67. Дайте определение положительно-определенной (отрицательно-определенной), положительно-полуопределенной и знакопеременной квадратичной формы. Приведите соответствующие примеры.

68. Сформулируйте критерий Сильвестра положительной определенности (отрицательной определенности) квадратичной формы. Приведите соответствующие примеры.

Пример экзаменационного билета

Экзаменационный билет №

1. (10) Приведите алгоритм определения перестановки по вектору инверсии. Пусть дан вектор $\vec{a} = \{4; 6; 1; 0; 3; 1; 1; 0\}$. Найдите перестановку π , для которой вектор инверсий $v(\pi)$ совпадает с \vec{a} . Сколько таких перестановок существует?
2. (10) Дайте определение алгебраической кратности корня многочлена. Приведите соответствующие примеры. Сформулируйте основную теорему алгебры комплексных чисел. Является ли поле \mathbb{C} алгебраически замкнутым? Ответ необходимо обосновать.
3. (10) Дайте определение нормального вида квадратичной формы. Что такое положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатура квадратичной формы. Приведите соответствующие примеры.
4. (10) Представьте комплексное число в алгебраической форме

$$\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}.$$

5. (10) Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 9 \\ 7 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B^T$, $D = A^T \cdot B$. Найдите: 1) максимум элементов матрицы C ; 2) сумму элементов матрицы D .

6. (10) Дана матрица: $A = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 24 \\ 12 & 21 & 11 \\ 13 & 27 & 22 \end{pmatrix}$. Пусть Z – собственное значение матрицы A с наибольшей мнимой частью. Найдите Z и соответствующий этому собственному значению собственный вектор X , первая координата которого равна 1, $X = (1, U, V)$. В ответе укажите: 1) мнимую часть Z ; 2) действительную часть U .

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная

- 8.1. Математика в экономике. Ч.1 : Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование: учебник для студ. экономич. спец. вузов / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов [и др.]. - Москва: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2003, 2005, 2006, 2007, 2011. - 384 с. – Текст : непосредственный. - То же. -

URL:<http://lpvserver190/fulltext/Book/TRUDY%20FA/Mathematics1.pdf> (дата обращения: 17.06.2022). - Текст : электронный.

8.2. Сборник задач по курсу "Математика в экономике". В 3 ч. Ч. 1: Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование: учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Бух. учет, анализ и аудит", "Финансы и кредит", "Налоги и налогообложение" и "Мировая экономика" / С. В. Пчелинцев [и др.]; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. - Москва: Финансы и статистика, 2013, 2017. - 256 с. - Текст : непосредственный.

б) дополнительная:

8.3. Винберг, Э. Б. Курс алгебры : учебник / Э. Б. Винберг. – Москва : МЦНМО, 2011. – 591 с. –ЭБС Университетская библиотека online. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299> (дата обращения: 17.06.2022). – Текст : электронный.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

9.1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. <http://portal.ufrf.ru/>.

9.2. Сайт департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. <http://www.fa.ru/org/dep/findata/>

9.3. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>

9.4. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>

9.5. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>

9.6. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>

9.7. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://www.biblio-online.ru/>

9.8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань»

<https://e.lanbook.com/>

9.9. Деловая онлайн-библиотека Alpina Digital <http://lib.alpinadigital.ru/>

9.10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>

9.11. Проект департамента Матричный калькулятор «MatCalc»

<https://matcalc.ru/>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов проходит в компьютерных классах. Организации самостоятельной работы служит календарно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций и практических занятий. Практические занятия проходят, как правило, в интерактивной форме. Интерактивная форма – решение лабораторных (практических) работ по тематике занятия в малых группах (2–4 студента) с использованием инструментария «*Jupyter Notebook*».

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:

11.1.1. Пакет офисных программ, Wolfram Mathematica, MATLAB

11.1.2. Антивирус Kaspersky

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

11.2.1. Информационно-правовая система «Консультант Плюс».

11.2.2. Информационно-правовая система «Гарант».

11.2.3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>

11.2.4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации

- не предусмотрены.

11.4. Библиотеки Python для организации работы в «Jupyter Notebook».

11.5. Приложения с использованием «*Wolfram Mathematica*»
<https://demonstrations.wolfram.com/>

11.6. Программа «*MatCalc*» <https://matcalc.ru/>

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Компьютерный класс, оснащённый системой динамического проецирования. Для освоения дисциплины необходим компьютер. При этом возможно использование компьютеров в компьютерных классах университета.

Все изучаемые технологии доступны на личных компьютерах студентов.